Um Estudo da Gravitação Planar com Torção sob orientação do professor José Abdala Helayël-Neto.

Tese de Mestrado

Efeitos da Torção no Espectro da "Gravitação Topologicamente Massiva"

Boldo, J. L.; de Moraes, L. M.; Helayël-Neto, J. A., Class. Quantum Grav. **17**, 813 (2000).

Resumo

Neste trabalho, consideramos o modelo da gravitação topologicamente massiva em (1+2)-D, levando em conta efeitos devido à torção e a termos quadráticos na curvatura. Para o tratamento pertubativo do problema, é necessário estendermos os operadores de spin de Barnes-Rivers. O espectro de excitações é analisado em detalhes e a unitaridade em "tree-level" é discutida em alguns casos especiais.

Em 1921, Eddington sugeriu a introdução de uma conexão não-simétrica,[1], e observou que a mesma fazia com que paralelogramas infinitesimais fossem quebrados, isto é, não se fechassem. Élie Cartan, em 1922-25, começou a trabalhar com conexões cuja parte anti-simétrica era não-nula,[2, 3], e provou que a mesma transforma-se como um tensor, a que ele denominou tensor de torção. Cartan chegou a sugerir que o mesmo deveria estar associado a algum tipo de momentum angular intrínseco da matéria.

[redacted] a torção do espaço-tempo era gerada pela distribuição da densidade de spin, e que a mesma poderia interagir somente por contato, através de interações tipo spin-spin,[8]. Estas interações contribuiriam para o tensor de energia-momentum, que, por sua vez, afetaria o campo gravitacional, [redacted] percebeu-se que o fato de não haver propagação da torção era uma prerrogativa muito mais devida às suposições históricas tomadas do que aos [redacted] princípios fundamentais da teoria. Assim, as suposições iniciais foram alteradas, de forma a permitir que houvesse propagação da torção. [redacted] Desta forma, um férmion pode interagir com outro à distância também pelo efeito da torção,[11]. Vários problemas novos decorrem desta situação, mas um dos mais sérios (e que já afetava o modelo anterior) é o fato dos efeitos associados à torção serem tão fracos que nenhuma evidência experimental pôde ainda ser achada com os recursos tecnológicos hoje conhecidos,[12, 13]. Como os resultados previstos em teorias com torção diferem dos resultados usuais só em situações extremas (como buracos negros e Big-Bang), ou em escalas cosmológicas,[10], fica difícil dizer em definitivo se a generalização é válida ou não. A resposta provavelmente virá da comparação dos modelos cosmológicos ou das teorias de unificação.

$$\tau_{\mu\nu}{}^{\lambda} = 2\,\Gamma_{[\mu\nu]}{}^{\lambda} = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}{}^{\lambda} \ .$$

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \frac{1}{2}(\tau_{\mu\nu}{}^{\lambda} + \tau^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \tau_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu})$$

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\} + K_{\mu\nu}{}^{\lambda}$$

$$\left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\} = \tfrac{1}{2} g^{\lambda\alpha}(\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu})$$

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\alpha^2} + \left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx^\nu}{d\alpha} + K_{(\mu\nu)}{}^{\lambda}\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx^\nu}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\alpha^2} + \left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\}\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx^\nu}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} + \left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}p^\mu u^\nu + F^\alpha = 0$$

$$\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} = 2\partial_{[\alpha}\,\Gamma_{\mu]\nu}{}^{\beta} + 2\,\Gamma_{[\alpha|\gamma}{}^{\beta}\,\Gamma_{|\mu]\nu}{}^{\gamma}$$

$$\Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \left\{{\lambda \atop \mu\nu}\right\} + K_{\mu\nu}{}^{\lambda}$$

$$K_{\mu\nu}{}^{\lambda} = \frac{1}{2}(\tau_{\mu\nu}{}^{\lambda} + \tau^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \tau_{\nu}{}^{\lambda}{}_{\mu})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} = R_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} &+ \partial_{\alpha}\,K_{\mu\nu}{}^{\beta} - \left\{{\gamma \atop \alpha\nu}\right\} K_{\mu\gamma}{}^{\beta} + \left\{{\beta \atop \alpha\gamma}\right\} K_{\mu\nu}{}^{\gamma} \\ &- \partial_{\mu}\,K_{\alpha\nu}{}^{\beta} + \left\{{\gamma \atop \mu\nu}\right\} K_{\alpha\gamma}{}^{\beta} - \left\{{\beta \atop \mu\gamma}\right\} K_{\alpha\nu}{}^{\gamma} \\ &+ K_{\alpha\gamma}{}^{\beta}\,K_{\mu\nu}{}^{\gamma} - K_{\mu\gamma}{}^{\beta}\,K_{\alpha\nu}{}^{\gamma}\ ,\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} = R_{\alpha\mu\nu}{}^{\beta} + D_{\alpha}\,K_{\mu\nu}{}^{\beta} - D_{\mu}\,K_{\alpha\nu}{}^{\beta} + K_{\alpha\gamma}{}^{\beta}\,K_{\mu\nu}{}^{\gamma} - K_{\mu\gamma}{}^{\beta}\,K_{\alpha\nu}{}^{\gamma}$$

$$D_{\alpha}\,K_{\mu\nu}{}^{\beta} = \partial_{\alpha}\,K_{\mu\nu}{}^{\beta} - \left\{{\gamma \atop \alpha\nu}\right\} K_{\mu\gamma}{}^{\beta} - \left\{{\gamma \atop \alpha\mu}\right\} K_{\gamma\nu}{}^{\beta} + \left\{{\beta \atop \alpha\gamma}\right\} K_{\mu\nu}{}^{\gamma}$$

$$\mathcal{R}_{\alpha\mu\nu\beta} = R_{\alpha\mu\nu\beta} + D_{\alpha}K_{\mu\nu\beta} - D_{\mu}K_{\alpha\nu\beta} + K_{\alpha\gamma\beta}\,K_{\mu\nu}{}^{\gamma} - K_{\mu\gamma\beta}\,K_{\alpha\nu}{}^{\gamma}$$

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + D_{\alpha}\,K_{\mu\nu}{}^{\alpha} - D_{\mu}\,K_{\alpha\nu}{}^{\alpha} + K_{\alpha\gamma}{}^{\alpha}\,K_{\mu\nu}{}^{\gamma} - K_{\mu\gamma}{}^{\alpha}\,K_{\alpha\nu}{}^{\gamma}$$

$$\mathcal{R} = R + 2D_{\alpha}\,K_{\mu}{}^{\mu\alpha} - K_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\gamma}\,K_{\mu}{}^{\mu\gamma} - K_{\mu\gamma}{}^{\alpha}\,K_{\alpha}{}^{\mu\gamma}$$

Torção em (1+2)-D

$$\tau_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\varphi + \frac{1}{2}(g_{\gamma\beta}t_\alpha - g_{\gamma\alpha}t_\beta) + \varepsilon_{\alpha\beta\lambda}\, X^\lambda{}_\gamma$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} &+ \frac{1}{2}(\varepsilon_{\mu\nu}{}^\alpha\, D_\alpha\varphi + D_\mu t_\nu + g_{\mu\nu}D_\alpha t^\alpha + \varepsilon^\alpha{}_{\nu\lambda}\, D_\alpha\, X^\lambda{}_\mu) \\ &- \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\varphi^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\gamma}t^\gamma\varphi + \frac{1}{4}(t_\mu t_\nu - g_{\mu\nu}t_\alpha t^\alpha) \\ &- \frac{1}{2}(\varepsilon_{\mu\nu\kappa}t_\alpha X^{\alpha\kappa} - \varepsilon_{\gamma\nu\kappa}t^\gamma\, X^\kappa{}_\mu) + X_\mu{}^\gamma\, X_{\gamma\nu}\ .\end{aligned}$$

$$\mathcal{R} = R + 2D_\alpha t^\alpha - \frac{3}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}t_\alpha t^\alpha + X_{\alpha\beta}X^{\alpha\beta}$$

$$\mathcal{S} = \int d^3x\sqrt{g}(a_1\mathcal{L}_1 + a_2\mathcal{L}_2 + a_3\mathcal{L}_3 + a_4\mathcal{L}_4)$$

$\mathcal{L}_1 = \mathcal{R}$ [redacted] $\mathcal{L}_2 = \mathcal{R}^2$ [redacted] $\mathcal{L}_3 = \mathcal{R}_{\mu\nu}\mathcal{R}^{\mu\nu}$

$$\mathcal{L}_4 = \varepsilon^{\mu\nu\lambda}\,\Gamma_{\lambda\sigma}{}^{\rho}\,(\partial_\mu\,\Gamma_{\rho\nu}{}^{\sigma} + \frac{2}{3}\,\Gamma_{\mu\tau}{}^{\sigma}\,\Gamma_{\nu\rho}{}^{\tau})$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + kh_{\mu\nu}$$

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu$$

$\lambda F_\alpha F^\alpha$ onde $F_\alpha = \partial_\beta(h^\beta{}_\alpha - \frac{1}{2}\delta^\beta_\alpha\, h_\gamma{}^\gamma)$

$$\lambda F_\alpha F^\alpha = \lambda(h_\alpha{}^\alpha\,\partial_\beta\partial_\gamma h^{\beta\gamma} - h^{\alpha\beta}\partial_\beta\partial_\gamma\, h^\gamma{}_\alpha - \frac{1}{4}\,h_\alpha{}^\alpha\,\Box\,h_\beta{}^\beta)$$

$$a_5 X^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = a_5[-\frac{k}{2}(X^{\alpha\beta}\Box h_{\alpha\beta} + X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta\,h_\gamma{}^\gamma - 2X^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\gamma\,h^\gamma{}_\beta)]$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} = \int d^3x \{ a_1 [& \frac{k^2}{2} (\frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \Box h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \, h_\alpha{}^\alpha \Box \, h_\beta{}^\beta + h_\alpha{}^\alpha \, \partial_\beta \partial_\gamma h^{\beta\gamma} - h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\gamma \, h^\gamma{}_\beta) \\
& - \frac{3}{2} \varphi^2 - \frac{1}{2} t_\alpha t^\alpha + X_{\alpha\beta} X^{\alpha\beta}] + \lambda (h_\alpha{}^\alpha \, \partial_\beta \partial_\gamma h^{\beta\gamma} - h^{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\gamma \, h^\gamma{}_\alpha - \frac{1}{4} \, h_\alpha{}^\alpha \Box \, h_\beta{}^\beta) \\
& + a_2 [k^2 (h_\alpha{}^\alpha \Box^2 \, h_\beta{}^\beta - 2 \, h_\alpha{}^\alpha \Box \partial_\beta \partial_\gamma h^{\beta\gamma} + h^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma \partial_\delta h^{\gamma\delta}) \\
& + 4k (t^\alpha \Box \partial_\alpha \, h_\beta{}^\beta - t^\alpha \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma h^{\beta\gamma}) - 4 t^\alpha \partial_\alpha \partial_\beta t^\beta] \qquad (2.70) \\
& + a_3 [\frac{k^2}{4} (h_{\alpha\beta} \Box^2 h^{\alpha\beta} + h_\alpha{}^\alpha \Box^2 \, h_\beta{}^\beta - 2 \, h_\alpha{}^\alpha \Box \partial_\beta \partial_\gamma h^{\beta\gamma} - 2 \, h^\alpha{}_\beta \Box \partial_\alpha \partial_\gamma h^{\gamma\beta} \\
& + 2 h^{\alpha\gamma} \partial_\alpha \partial_\gamma \partial_\beta \partial_\delta h^{\delta\beta}) + \frac{k}{2} (3 t^\alpha \Box \partial_\alpha \, h_\beta{}^\beta - 3 t^\alpha \partial_\alpha \partial_\beta \partial_\gamma h^{\beta\gamma} + 2 \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \, X_\gamma{}^\delta \Box \partial_\alpha h_{\delta\beta} \\
& - 2 \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \, X_\gamma{}^\delta \, \partial_\alpha \partial_\delta \partial_\kappa \, h^\kappa{}_\beta) - \frac{1}{4} (2 \varphi \Box \varphi + 4 \varphi \partial_\alpha \partial_\beta X^{\alpha\beta} + t^\alpha \Box t_\alpha + 5 t^\alpha \partial_\alpha \partial_\beta t^\beta \\
& + 4 \epsilon^{\alpha\beta\gamma} t_\beta \partial_\delta \partial_\alpha \, X_\gamma{}^\delta + 4 X^{\alpha\beta} \Box X_{\alpha\beta} - 4 \, X^\alpha{}_\beta \, \partial_\alpha \partial_\gamma X^{\gamma\beta})] \\
& + a_4 [\frac{k^2}{2} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} (h_\gamma{}^\delta \Box \partial_\alpha h_{\delta\beta} - h_\gamma{}^\delta \, \partial_\alpha \partial_\kappa \partial_\delta \, h^\kappa{}_\beta) \\
& - \frac{k}{2} (3 X^{\alpha\beta} \Box h_{\alpha\beta} + 3 X^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \, h_\gamma{}^\gamma - 6 X^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\gamma \, h^\gamma{}_\beta) \\
& - \frac{1}{4} (2 \varphi \partial_\alpha t^\alpha - \epsilon^{\alpha\beta\gamma} t_\beta \partial_\alpha t_\gamma - 4 X^{\alpha\beta} \partial_\alpha t_\beta + 4 \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \, X^\delta{}_\gamma \, \partial_\alpha X_{\delta\beta})] \\
& + a_5 [- \frac{k}{2} (X^{\alpha\beta} \Box h_{\alpha\beta} + X^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \, h_\gamma{}^\gamma - 2 X^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\gamma \, h^\gamma{}_\beta)] \} \; .
\end{aligned}
$$

Sejam os operadores tensoriais de Barnes-Rivers em (1+2)-D:

$$P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\alpha}\theta_{\nu\beta} + \theta_{\mu\beta}\theta_{\nu\alpha}) - \frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta} \ ,$$

$$P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta_{\mu\alpha}\omega_{\nu\beta} + \theta_{\mu\beta}\omega_{\nu\alpha} + \theta_{\nu\alpha}\omega_{\mu\beta} + \theta_{\nu\beta}\omega_{\mu\alpha}) \ ,$$

$$P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{2}\theta_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta} \ ,$$

$$P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = \omega_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta} \ ,$$

$$P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\theta_{\mu\nu}\omega_{\alpha\beta} \ ,$$

$$P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}\omega_{\mu\nu}\theta_{\alpha\beta} \ .$$

$\theta_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \omega_{\mu\nu}$ e $\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\Box}$

$A_{\mu\nu} = \epsilon_{\gamma\mu\nu}\partial^\gamma$, $B_{\mu,\alpha\beta} = \eta_{\mu\alpha}\partial_\beta + \eta_{\mu\beta}\partial_\alpha$ e $D_{\mu,\alpha\beta} = A_{\mu\alpha}\partial_\beta + A_{\mu\beta}\partial_\alpha$

$$S_{\mu\nu,\alpha\beta} = A_{\alpha\mu}\theta_{\nu\beta} + A_{\beta\mu}\theta_{\nu\alpha} + A_{\alpha\nu}\theta_{\mu\beta} + A_{\beta\nu}\theta_{\mu\alpha}$$

$$R_{\mu\nu,\alpha\beta} = A_{\alpha\mu}\omega_{\nu\beta} + A_{\beta\mu}\omega_{\nu\alpha} + A_{\alpha\nu}\omega_{\mu\beta} + A_{\beta\nu}\omega_{\mu\alpha}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} = \int d^3x \{ &\frac{1}{2} h^{\mu\nu} \{ (\frac{k^2 a_1 \Box}{2} + \frac{a_3 k^2 \Box^2}{2}) P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \lambda \Box P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - [\frac{(a_1 k^2 + 2\lambda)\Box - 8k^2 a_2 \Box^2}{2} \\
&- \frac{3}{2} a_3 k^2 \Box^2] P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{\lambda\Box}{2} P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{\sqrt{2}\lambda\Box}{2} (P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) + \frac{a_4 k^2 \Box}{4} S_{\mu\nu,\alpha\beta} \} h^{\alpha\beta} \\
&+ \frac{1}{2} \varphi (-3a_1 - a_3 \Box) \varphi + \frac{1}{2} t^\mu [- \frac{2a_1 + a_3 \Box}{2} \theta_{\mu\alpha} - (a_1 + 8a_2 \Box + 3a_3 \Box) \omega_{\mu\alpha} + \frac{a_4}{2} A_{\mu\alpha}] t^\alpha \\
&+ \frac{1}{2} X^{\mu\nu} [(2a_1 - 2a_3 \Box) P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + (2a_1 - a_3 \Box) P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + (2a_1 - a_3 \Box) P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ (2a_1 - \frac{a_3}{2}) P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{a_4}{2} S_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{a_4}{2} R_{\mu\nu,\alpha\beta}] X^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} t^\mu [(8a_2 + 3a_3) k \Box \theta_{\alpha\beta} \partial_\mu] h^{\alpha\beta} \\
&+ \frac{1}{2} X^{\mu\nu} [-k(3a_4 + a_5) \Box P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + k(3a_4 + a_5) \Box P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{k a_3}{2} \Box S_{\mu\nu,\alpha\beta}] h^{\alpha\beta} \\
&+ \frac{1}{2} \varphi (-a_4 \partial_\alpha) t^\alpha + \frac{1}{2} \varphi (-2a_3 \Box \omega_{\alpha\beta}) X^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} t^\mu (-a_3 D_{\mu,\alpha\beta} - a_4 B_{\mu,\alpha\beta}) X^{\alpha\beta} \} \ .
\end{aligned}
$$

$$S = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\Psi^T M \Psi\right)$$

$$M = \begin{pmatrix} hh & hX & ht & h\varphi \\ Xh & XX & Xt & X\varphi \\ th & tX & tt & t\varphi \\ \varphi h & \varphi X & \varphi t & \varphi\varphi \end{pmatrix} \quad \Psi \equiv \begin{pmatrix} h^{\alpha\beta} \\ X^{\alpha\beta} \\ t^{\alpha} \\ \varphi \end{pmatrix}$$

$$hh = (\frac{k^2 a_1 \Box}{2} + \frac{a_3 k^2 \Box^2}{2}) P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \lambda \Box P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - [\frac{(a_1 k^2 + 2\lambda)\Box - 8k^2 a_2 \Box^2}{2} \tag{3.46}$$

$$- \frac{3}{2} a_3 k^2 \Box^2] P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{\lambda \Box}{2} P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{\sqrt{2}\lambda\Box}{2}(P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) + \frac{a_4 k^2 \Box}{4} S_{\mu\nu,\alpha\beta}$$

$$hX = Xh = -\frac{k}{2}(3a_4 + a_5)\Box P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{k}{2}(3a_4 + a_5)\Box P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{k a_3}{4} \Box S_{\mu\nu,\alpha\beta}$$

$$ht = -th = -\frac{(8a_2 + 3a_3)k\Box}{2} \theta_{\alpha\beta} \partial_\mu$$

$$h\varphi = \varphi h = 0$$

$$XX = (2a_1 - 2a_3\Box) P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + (2a_1 - a_3\Box) P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + (2a_1 - a_3\Box) P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}$$

$$+ (2a_1 - \frac{a_3}{2}) P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{a_4}{2} S_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{a_4}{2} R_{\mu\nu,\alpha\beta} ,$$

$$Xt = -\frac{a_3}{2} D_{\mu,\alpha\beta} + \frac{a_4}{2} B_{\mu,\alpha\beta}$$

$$tX = -\frac{a_3}{2} D_{\mu,\alpha\beta} - \frac{a_4}{2} B_{\mu,\alpha\beta}$$

$$X\varphi = \varphi X = -a_3 \Box \omega_{\alpha\beta}$$

$$tt = -\frac{2a_1 + a_3\Box}{2} \theta_{\mu\alpha} - (a_1 + 8a_2\Box + 3a_3\Box)\omega_{\mu\alpha} + \frac{a_4}{2} A_{\mu\alpha}$$

$$t\varphi = -\varphi t = \frac{a_4}{2} \partial_\mu$$

$$\varphi\varphi = -3a_1 - a_3\Box$$

O propagador dos campos, de forma genérica, é dado por:

$$< 0|T[\phi_\alpha(x)\phi_\beta(y)]|0 >= iM^{-1}\delta^3(x-y) \ ,$$

$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, onde A, B, C e D são sub-matrizes.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} ,$$

$$MM^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} AX + BZ = I \\ AY + BW = 0 \\ CX + DZ = 0 \\ CY + DW = I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = (A - BD^{-1}C)^{-1} \\ Y = -A^{-1}BW \\ Z = -D^{-1}CX \\ W = (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{cases} ,$$

A como sendo o termo hh

D designa a matriz 3×3 com os termos de torção somente

$$\widetilde{hh} = \left[hh - \begin{pmatrix} hX & ht & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XX & Xt & X\varphi \\ tX & tt & t\varphi \\ \varphi X & \varphi t & \varphi\varphi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Xh \\ th \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{hX} & \widetilde{ht} & \widetilde{h\varphi} \end{pmatrix} = -(hh)^{-1} \begin{pmatrix} hX & ht & h\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{XX} & \widetilde{Xt} & \widetilde{X\varphi} \\ \widetilde{tX} & \widetilde{tt} & \widetilde{t\varphi} \\ \widetilde{\varphi X} & \widetilde{\varphi t} & \widetilde{\varphi\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{Xh} \\ \widetilde{th} \\ \widetilde{\varphi h} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} XX & Xt & X\varphi \\ tX & tt & t\varphi \\ \varphi X & \varphi t & \varphi\varphi \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} Xh \\ th \\ 0 \end{pmatrix} \widetilde{hh}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{XX} & \widetilde{Xt} & \widetilde{X\varphi} \\ \widetilde{tX} & \widetilde{tt} & \widetilde{t\varphi} \\ \widetilde{\varphi X} & \widetilde{\varphi t} & \widetilde{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} XX & Xt & X\varphi \\ tX & tt & t\varphi \\ \varphi X & \varphi t & \varphi\varphi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Xh \\ th \\ \varphi h \end{pmatrix} (hh)^{-1} \begin{pmatrix} hX & ht & h\varphi \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} XX & Xt & X\varphi \\ tX & tt & t\varphi \\ \varphi X & \varphi t & \varphi\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \underline{XX} & \underline{Xt} & \underline{X\varphi} \\ \underline{tX} & \underline{tt} & \underline{t\varphi} \\ \underline{\varphi X} & \underline{\varphi t} & \underline{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \text{ é dada por:}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{XX} & \underline{Xt} \\ \underline{tX} & \underline{tt} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} XX & Xt \\ tX & tt \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X\varphi \\ t\varphi \end{pmatrix} (\varphi\varphi)^{-1} \begin{pmatrix} \varphi X & \varphi t \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{X\varphi} \\ \underline{t\varphi} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} XX & Xt \\ tX & tt \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X\varphi \\ t\varphi \end{pmatrix} \underline{\varphi\varphi}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\varphi X} & \underline{\varphi t} \end{pmatrix} = - (\varphi\varphi)^{-1} \begin{pmatrix} \varphi X & \varphi t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{XX} & \underline{Xt} \\ \underline{tX} & \underline{tt} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\varphi\varphi} = \left[\varphi\varphi - \begin{pmatrix} \varphi X & \varphi t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XX & Xt \\ tX & tt \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} X\varphi \\ t\varphi \end{pmatrix} \right]^{-1}$$

com os elementos da inversa de $\begin{pmatrix} XX & Xt \\ tX & tt \end{pmatrix}$ dados por:

$$\begin{aligned}
\widehat{XX} &= \left[XX - Xt\,(tt)^{-1}\,tX\right]^{-1} \ , \\
\widehat{Xt} &= -\,(tt)^{-1}\,tX\,\widehat{XX} \ , \\
\widehat{tt} &= \left[tt - tX\,(XX)^{-1}\,Xt\right]^{-1} \ , \\
\widehat{tX} &= -\,(XX)^{-1}\,Xt\widehat{tt} \ ,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

sendo, agora, $(tt)^{-1}$ e $(XX)^{-1}$ o operador inverso dos elementos tt e XX de M. Os mesmos podem ser facilmente invertidos, usando-se a álgebra

$a_2 = a_3 = a_5 = 0$, e façamos, também, $h = 0$

$$\mathcal{L} = \frac{a_1}{2}(-3\varphi^2 - t_\mu t^\mu + 2X_{\mu\nu}X^{\mu\nu}) + \frac{a_4}{4}(-2\varphi\partial_\mu t^\mu + \epsilon^{\mu\nu\lambda}t_\nu\partial_\mu t_\lambda$$

$$+ 4X^{\mu\nu}\partial_\mu t_\nu - 4\epsilon^{\mu\nu\lambda}\, X_\lambda{}^\kappa\, \partial_\mu X_{\kappa\nu}) \ ,$$

φ passa a ser um campo auxiliar, dado por

$$\varphi = -\frac{a_4}{6a_1}\partial_\mu t^\mu \ .$$

$$< XX >_{\mu\nu,\alpha\beta} = i\left[\frac{a_1}{2(a_1^2 - p^2a_4^2)}P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{1}{2a_1}(P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) \right. \tag{4.15}$$

$$\left. + \frac{12a_1^2 - p^2a_4^2}{2a_1(12a_1^2 + 5p^2a_4^2)}P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{a_4}{8(a_1^2 - p^2a_4^2)}S_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{a_4}{8a_1^2}R_{\mu\nu,\alpha\beta}\right] \ ,$$

$$< Xt >_{\alpha,\mu\nu} = - < tX >_{\mu,\alpha\beta} = i\left[\frac{6a_4}{12a_1^2 + 5p^2a_4^2}\omega_{\mu\nu}\partial_\alpha + \frac{a_4}{4a_1^2}(\theta_{\alpha\mu}\partial_\nu + \theta_{\alpha\nu}\partial_\mu)\right] \tag{4.16}$$

e

$$< tt >_{\mu\alpha} = i\left[-\frac{1}{a_1}\theta_{\mu\alpha} - \frac{12a_1}{12a_1^2 + 5p^2a_4^2}\omega_{\mu\alpha} - \frac{a_4}{2a_1^2}A_{\mu\alpha}\right] \ . \tag{4.17}$$

Desta expressão, vemos que ocorre um pólo massivo, não-taquiônico, no setor de spin-2 do propagador $< XX >$; um pólo taquiônico no setor longitudinal de $< tt >$ e no termo de "mixing" de X com t. Saturando os propagadores com as correntes conservadas externas, temos que tanto $< tt >$ como os termos mistos em Xt não se acoplam com as mesmas e, assim, podemos nos concentrar exclusivamente em $< XX >$.

Sabemos que, de forma geral, analisando-se a parte imaginária dos resíduos dos propagadores saturados com as correntes externas compatíveis com as simetrias da teoria, podemos verificar a unitaridade em "tree-level" da mesma, e identificar que graus de liberdade são dinâmicos. Para isto, consideremos a corrente expandida em termos de uma base completa:

$$\begin{aligned}\tau_{\mu\nu} &= c_1 p_\mu p_\nu + c_2 p_\mu \widetilde{p}_\nu + c_3 p_\mu \varepsilon_\nu + c_4 \widetilde{p}_\mu p_\nu + c_5 \widetilde{p}_\mu \widetilde{p}_\nu \\ &+ c_6 \widetilde{p}_\mu \varepsilon_\nu + c_7 \varepsilon_\mu p_\nu + c_8 \varepsilon_\mu \widetilde{p}_\nu + c_9 \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu \ ,\end{aligned} \tag{4.18}$$

onde

$$p_\mu = (p_0, \overrightarrow{p}),\ \widetilde{p}_\mu = (p_0, -\overrightarrow{p}) \text{ e } \varepsilon_\mu = (0, \overrightarrow{\epsilon}) \ , \tag{4.19}$$

que satisfazem às condições,

$$\begin{aligned} p_\mu \widetilde{p}^\mu &= (p_0)^2 + (\overrightarrow{p})^2 \neq 0 \ , \\ p_\mu \varepsilon^\mu &= \widetilde{p}_\mu \varepsilon^\mu = 0 \\ \varepsilon_\mu \varepsilon^\mu &= -1 \ . \end{aligned} \tag{4.20}$$

De acordo com a simetria da teoria ($\tau_{\mu\nu} = \tau_{\nu\mu}$) e com a condição $p_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$, a corrente acima fica:

$$\tau_{\mu\nu} = c_1[p_\mu p_\nu - a(p_\mu \widetilde{p}_\nu + \widetilde{p}_\mu p_\nu) + a^2 \widetilde{p}_\mu \widetilde{p}_\nu] \tag{4.22}$$
$$+ c_3[p_\mu \varepsilon_\nu + \varepsilon_\mu p_\nu - a(\widetilde{p}_\mu \varepsilon_\nu + \varepsilon_\mu \widetilde{p}_\nu)] + c_9 \varepsilon_\mu \varepsilon_\nu \ ,$$

onde

$$a = \frac{p^2}{p_\mu \widetilde{p}^\mu} \ . \tag{4.23}$$

A amplitude de transição no espaço dos momentos é o propagador saturado com as correntes,

$$\mathcal{A} = \tau^{*\mu\nu}(-p) < X(-p) X(p) >_{\mu\nu,\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta}(p) \ , \tag{4.24}$$

e, devido ao vínculo $p_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$, somente os projetores $P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}$, $P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ e $S_{\mu\nu,\alpha\beta}$ contribuirão para a amplitude, com

$$\tau^{*\mu\nu} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} = \text{coeficiente} \times (|\tau_{\mu\nu}|^2 - \frac{1}{2} |\tau_\mu{}^\mu|^2) \ , \tag{4.25}$$
$$\tau^{*\mu\nu} P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} = \text{coeficiente} \times (\frac{1}{2} |\tau_\mu{}^\mu|^2) \ ,$$

e

$$\tau^{*\mu\nu} S_{\mu\nu,\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} = \text{coeficiente} \times \left[-8ap^2(a^2-1)\,\mathrm{Im}(c_3^* c_1)\epsilon_{\gamma\alpha\mu} p^\gamma \widetilde{p}^\alpha \varepsilon^\mu \right] \ . \tag{4.26}$$

Sendo

$$|\tau_{\mu\nu}|^2 = |c_9|^2 \ , \tag{4.27}$$

$$|\tau_\mu{}^\mu|^2 = |c_9|^2 + |c_1|^2 p^4 (a^2-1)^2 + 2i\,\mathrm{Im}(c_1^* c_9) p^2 (a^2-1) \ .$$

Para uma excitação de massa nula, $p^2 = 0$, e para uma exitação massiva no seu referencial de repouso, $p_\mu = (m, 0, 0)$, $\widetilde{p}_\mu = (m, 0, 0)$ (o que torna $a = 1$ e $a^2 - 1 = 0$). As expressões acima em ambos os casos ficam dadas por:

$$\tau^{*\mu\nu} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} = \text{coeficiente} \times (\frac{1}{2} |c_9|^2) \ , \tag{4.28}$$

$$\tau^{*\mu\nu} P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} = \text{coeficiente} \times (\frac{1}{2} |c_9|^2)$$

e

$$\tau^{*\mu\nu} S_{\mu\nu,\alpha\beta} \tau^{\alpha\beta} = 0 \ . \tag{4.29}$$

Assim, voltando ao nosso caso, temos que a amplitude será:

$$\mathcal{A} = \frac{i}{p^2 - (\frac{a_1}{a_4})^2}\left[-\frac{a_1}{4a_4} + \frac{p^2 - (\frac{a_1}{a_4})^2}{4a_1}\right]|c_9|^2 \ , \tag{4.30}$$

e a parte imaginária do resíduo da amplitude fica:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\left(\lim_{p^2 \to (\frac{a_1}{a_4})^2}[p^2 - (\frac{a_1}{a_4})^2]\mathcal{A}\right) = -\frac{a_1}{4a_4^2}|c_9|^2 \ . \tag{4.31}$$

Vemos, portanto, que para não violarmos a unitaridade, o coeficiente associado ao escalar de curvatura tem que satisfazer a $a_1 < 0$. O oposto do que é encontrado quando fazemos a teoria de Einstein-Chern-Simons,[15], sem levarmos em consideração os efeitos de torção.

Consideremos agora o que acontece quando, ainda considerando $a_2 = a_3 = a_5 = 0$, incorporamos as flutuações da métrica. Neste caso, os propagadores ficarão:

$$< hh >_{\mu\nu,\alpha\beta} = i \left[-\frac{8a_1(4a_1^2 + 5a_4^2 p^2)}{k^2 p^2 (4a_1^2 - a_4^2 p^2)^2} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2\alpha}{p^2} P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{8a_1}{k^2 p^2 (4a_1^2 - 9a_4^2 p^2)} P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \right.$$
$$+ \frac{4[4a_1 + k^2\alpha(4a_1^2 - 9a_4^2 p^2)]}{k^2 p^2 (4a_1^2 - 9a_4^2 p^2)} P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{8\sqrt{2}a_1}{k^2 p^2 (4a_1^2 - 9a_4^2 p^2)} (P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) \tag{4.32}$$
$$\left. + \frac{2(8a_1^2 + a_4^2 p^2)}{k^2 p^2 (4a_1^2 - a_4^2 p^2)^2} S_{\mu\nu,\alpha\beta} \right] ,$$

$$< hX >_{\mu\nu,\alpha\beta} = i\left[\frac{6a_4(4a_1^2+a_4^2p^2)}{k(4a_1^2-a_4^2p^2)^2}P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{6a_4}{k(4a_1^2-9a_4^2p^2)}P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta}\right. \tag{4.33}$$
$$\left.+\frac{6\sqrt{2}a_4}{k(4a_1^2-9a_4^2p^2)}P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta}-\frac{6a_1a_4}{k(4a_1^2-a_4^2p^2)^2}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\right] \ ,$$

$$< Xh >_{\mu\nu,\alpha\beta} = i\left[\frac{6a_4(4a_1^2+a_4^2p^2)}{k(4a_1^2-a_4^2p^2)^2}P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{6a_4}{k(4a_1^2-9a_4^2p^2)}P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta}\right. \tag{4.34}$$
$$\left.+\frac{6\sqrt{2}a_4}{k(4a_1^2-9a_4^2p^2)}P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta}-\frac{6a_1a_4}{k(4a_1^2-a_4^2p^2)^2}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\right] \ ,$$

$$< XX >_{\mu\nu,\alpha\beta} = i\left[\frac{2a_1(4a_1^2-7a_4^2p^2)}{(4a_1^2-a_4^2p^2)^2}P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{1}{2a_1}P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{2a_1}{4a_1^2-9a_4^2p^2}P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}\right.$$
$$\left.+\frac{12a_1^2-a_4^2p^2}{2a_1(12a_1^2+5a_4^2p^2)}P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{a_4(2a_1^2+a_4^2p^2)}{(4a_1^2-a_4^2p^2)^2}S_{\mu\nu,\alpha\beta}+\frac{a_4}{8a_1^2}R_{\mu\nu,\alpha\beta}\right] \ , \tag{4.35}$$

$$< Xt >_{\alpha,\mu\nu} = - < tX >_{\alpha,\mu\nu} = i\left[\frac{6a_4}{12a_1^2+5a_4^2p^2}\omega_{\mu\nu}p_\alpha+\frac{a_4}{4a_1^2}(\theta_{\alpha\mu}p_\nu+\theta_{\alpha\nu}p_\mu)\right] \ , \tag{4.36}$$

$$< X\varphi >_{\mu\nu} = < \varphi X >_{\mu\nu} = i\left[-\frac{a_4^2p^2}{a_1(12a_1^2+5a_4^2p^2)}\right]\omega_{\mu\nu} \ , \tag{4.37}$$

$$< tt >_{\mu\alpha} = i\left[-\frac{1}{a_1}\theta_{\mu\alpha}-\frac{12a_1}{12a_1^2+5a_4^2p^2}\omega_{\mu\alpha}-\frac{a_4}{2a_1^2}A_{\mu\alpha}\right] \ , \tag{4.38}$$

$$< t\varphi >_{\mu} = - < \varphi t >_{\mu} = i\left[-\frac{2a_4}{12a_1^2+5a_4^2p^2}\right]p_\mu \tag{4.39}$$

e

$$< \varphi\varphi > = i\left[-\frac{2(2a_1^2+a_4^2p^2)}{a_1(12a_1^2+5a_4^2p^2)}\right] \ . \tag{4.40}$$

Vemos das expressões acima que os propagadores têm as seguintes caracteristicas a serem observadas:

(i) Existe um pólo duplo indesejável em $p^2 = (\frac{2a_1}{a_4})^2$ no setor de spin-2 dos campos h, X e de "mixing" entre eles.

(ii) Ocorre um modo massivo em $p^2 = (\frac{2a_1}{3a_4})^2$ no setor de spin-0 dos mesmos campos acima mencionados.

(iii) Um pólo taquiônico aparece em $p^2 = -(\frac{12a_1^2}{5a_4^2})$ no setor longitudinal dos campos X e t. O mesmo pólo aparece no campo escalar φ. Este pólo não contribui para o resíduo da amplitude, uma vez que as fontes são transversas.

Procuremos agora as restrições que devemos impor sobre os parâmetros da teoria de forma a obtermos uma matriz de resíduos positivo-definidos definida no pólo. Usando o procedimento utilizado no caso anterior, obtemos o seguinte resíduo dos propagadores saturados no pólo $p^2 = (\frac{2a_1}{3a_4})^2$

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \lim_{p^2 \to (\frac{2a_1}{3a_4})^2} \left[\begin{pmatrix} \tau^* & \sigma^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{8a_1}{k^2p^2} & -\frac{6a_4}{k} \\ -\frac{6a_4}{k} & -2a_1 \end{pmatrix} P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma \end{pmatrix} \right] , \tag{4.41}$$

onde τ é a corrente externa associada ao campo gravitacional e σ a corrente associada ao campo de torção de rank-2. Para garantirmos a positividade, devemos impor que o parâmetro a_1 seja negativo, correspondendo assim à propagação do pólo massivo de spin-0.

Vemos, portanto, que a inclusão do tensor de torção na teoria de Einstein-Chern-Simons, via substituição do símbolo de Christoffel pela conexão de Cartan gera uma teoria em que o propagador do setor de spin-2 contém polos de segunda ordem, levando conseqüentemente à violação da unitaridade. Para contornar esta situação indesejável, consideremos o efeito da introdução do termo proveniente de considerarmos $a_5 \neq 0$, e convenientemente escolhamos $a_5 = -3a_4$. Neste caso, ocorre o desacoplamento do termo gravitacional usual das partes provenientes da torção, e os propagadores ficam com a forma:

$$< hh >_{\mu\nu,\alpha\beta}= i \left[\frac{a_1}{2k^2 a_4 p^2[p^2-(\frac{a_1}{2a_4})^2]} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2\alpha}{p^2} P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2}{k^2 a_1 p^2} P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \right. \tag{4.42}$$

$$\left. +4\frac{k^2 a_1 \alpha + 1}{k^2 a_1 p^2} P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2\sqrt{2}}{k^2 a_1 p^2} (P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) - \frac{a_4}{4k^2 a_4 p^2[p^2-(\frac{a_1}{2a_4})^2]} S_{\mu\nu,\alpha\beta} \right]$$

$$< XX >_{\mu\nu,\alpha\beta}= i \left[-\frac{a_1}{a_4^2[p^2-(\frac{a_1}{a_4})^2]} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{1}{2a_1} (P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) \right. \tag{4.43}$$

$$\left. + \frac{12a_1^2 - p^2 a_4^2}{2a_1(5a_4^2 p^2 + 12a_1^2)} P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{a_4}{8a_4^2[p^2-(\frac{a_1}{a_4})^2]} S_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{a_4}{8a_1^2} R_{\mu\nu,\alpha\beta} \, , \right]$$

$$< Xt >_{\alpha,\mu\nu}= - < tX >_{\alpha,\mu\nu}= i \left[\frac{6a_4}{12a_1^2 + 5a_4^2 p^2} \omega_{\mu\nu} \partial_\alpha + \frac{a_4}{4a_1^2} (\theta_{\alpha\mu}\partial_\nu + \theta_{\alpha\nu}\partial_\mu) \right]$$

$$< tt >_{\mu,\alpha}= i \left[-\frac{1}{a_1}\theta_{\mu\alpha} - \frac{12a_1}{12a_1^2 + 5a_4^2 p^2} \omega_{\mu\alpha} - \frac{a_4}{2a_1^2} A_{\mu\alpha} \right] . \tag{4.45}$$

Temos, assim, neste caso, três pólos distintos a serem analisados, um sem massa, no setor do campo h, e dois massivos, sendo um no setor de h e o outro no setor de X. Temos, também, um pólo taquiônico nos setores longitudinais de X e t, que não contribuem para a amplitude corrente-corrente.

Verifiquemos como fica a dinâmica e que condições devemos impor sobre os parâmetros para assegurar a unitaridade. No pólo de massa zero do setor gravitacional, obtemos:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\left(\lim_{p^2\to 0} p^2\mathcal{A}\right) = 0 \ , \tag{4.46}$$

e, portanto, a excitação não-massiva não possui dinâmica, não havendo propagação deste grau de liberdade. Consideremos agora a excitação massiva:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\left(\lim_{p^2\to(\frac{a_1}{2a_4})^2}[p^2 - (\frac{a_1}{2a_4})^2]\mathcal{A}\right) = \frac{1}{k^2 a_1}\left|c_9\right|^2 \ ; \tag{4.47}$$

para garantirmos a unitaridade, temos que ter $a_1 > 0$.

Verificando a excitação massiva de X, encontramos:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\left(\lim_{p^2\to(\frac{a_1}{a_4})^2}[p^2 - (\frac{a_1}{a_4})^2]\mathcal{A}\right) = -\frac{a_1}{4a_4^2}\left|c_9\right|^2 \ , \tag{4.48}$$

e, para garantirmos propagação que não viole a unitaridade $a_1 < 0$. Vemos, portanto, que nesse caso é impossível satisfazer a condição simultaneamente para os dois casos em questão, não havendo propagação que preserve a unitaridade.

Quando consideramos a_1, a_2, a_3 e a_4 diferentes de zero, a expressão dos propagadores fica extremamente complicada, com termos de p^{12}. Vale como observação que o setor de spin-2 da teoria não tem o seu pólo alterado pelo acréscimo de tais termos, continuando como um pólo de segunda ordem em $p^2 = (\frac{2a_1}{a_4})^2$. Contudo, se fizermos $a_1 = 0$ e $a_5 = -3a_4$, obteremos, restringindo-nos ao setor de spin-2 tão somente (por motivo de simplicidade, já que os outros blocos não afetam esse setor) que:

$$< hh >_{\mu\nu,\alpha\beta} = i \left[\frac{2}{9k^2 a_3 p^2 [p^2 - (\frac{2a_4}{3a_3})^2]} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2\alpha}{p^2} P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2}{k^2(8a_2 + 3a_3)p^4} P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \right.$$
$$+ \frac{4(8a_2 + 3a_3)\alpha k^2 p^2 + 4}{(8a_2 + 3a_3)k^2 p^4} P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{2\sqrt{2}}{(8a_2 + 3a_3)k^2 p^4} (P^{(0-sw)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + P^{(0-ws)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) \tag{4.49}$$
$$\left. - \frac{3a_3^2 p^2 - 2a_4^2}{18k^2 a_3^2 a_4 [p^2 - (\frac{2a_4}{3a_3})^2]} S_{\mu\nu,\alpha\beta} \right] ,$$

$$< hX >_{\mu\nu,\alpha\beta} = < Xh >_{\mu\nu,\alpha\beta} = i\left[-\frac{1}{9ka_4[p^2-(\frac{2a_4}{3a_3})^2]}P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} - \frac{1}{18ka_3p^2[p^2-(\frac{2a_4}{3a_3})^2]}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\right] \tag{4.50}$$

e

$$< XX >_{\mu\nu,\alpha\beta} = i\left[\frac{2}{9a_3[p^2-(\frac{2a_4}{3a_3})^2]}P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \frac{1}{a_3[p^2-(\frac{a_4}{a_3})^2]}P^{(1)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + \right. \tag{4.51}$$

$$+\frac{1}{a_3p^2}(P^{(0-s)}_{\mu\nu,\alpha\beta} + 2P^{(0-w)}_{\mu\nu,\alpha\beta}) + \frac{a_4}{2a_3^2p^2[p^2-(\frac{a_4}{a_3})^2]}R_{\mu\nu,\alpha\beta}$$

$$\left. -\frac{3a_3^2p^2-4a_4^2}{9a_4a_3^2[p^2-(\frac{2a_4}{3a_3})^2]}S_{\mu\nu,\alpha\beta}\right].$$

Temos, então, um pólo massivo em $p^2 = (\frac{2a_4}{3a_3})^2$. Efetuando-se a análise usual até então feita aqui, obtemos, para o campo h:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \lim_{p^2 \to (\frac{2a_4}{3a_3})^2} \left[\begin{pmatrix} \tau^* & \sigma^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{9k^2 a_3 p^2} & -\frac{1}{9ka_4} \\ -\frac{1}{9ka_4} & \frac{2}{9a_3} \end{pmatrix} P^{(2)}_{\mu\nu,\alpha\beta} \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma \end{pmatrix} \right], \tag{4.52}$$

A condição $a_3 = k^2 a_4$ e $a_4 > 0$ sobre os parâmetros garantem que o pólo massivo em questão não se constitui num ghost.

Obeservamos também que a matriz de resíduo fornece 2 autovalores positivos, de forma que, neste modelo, ocorre a propagação de um grávitom de spin-2 massivo, bem como de um quantum de torção massivo e também com spin-2.

Vemos, assim, que os termos de ordem superior podem ser usados de forma a contornarmos o problema do pólo duplo no setor de spin-2, dando uma dinâmica mais interessante.

Várias peculiaridades foram encontradas, como a presença de um pólo duplo independente do gauge no setor de spin-2 dos propagadores de gravitação e torção, o que destrói a unitariedade do modelo. Foi visto também que a presença de potências mais altas da curvatura e de um termo de “mixing” entre o tensor de Ricci Riemanniano e o setor de spin-2 da torção podem ser usados para restaurar a unitaridade da teoria, uma vez escolhidos propriamente os parâmetros dos mesmos, o que leva à supressão do pólo duplo nos propagadores. Verificou-se a possibilidade de se truncar os graus de liberdade gravitacionais usuais e se considerar somente a propagação de torção num espaço plano. Em tal situação, não haveria problema com o pólo duplo e a unitaridade seria garantida.

Tese de Doutorado

Discussão do Formalismo de Primeira-Ordem para a Gravitação Quântica Planar com Torção

de Moraes, L. M. ; Helayël-Neto, J. A. ; Vasquez, V. J. . Discussing quantum aspects of higher-derivative 3-D gravity in the first-order formalism. European Physical Journal C, p. 311, 2010.

Resumo

Neste trabalho, retomamos a discussão de métodos para a obtenção dos propagadores e para a identificação do espectro de excitações associados ao campo de gravitação em (1+2)-D em presença de torção, adotando, porém, o formalismo de primeira-ordem, sendo, assim, as excitações associadas aos campos de "vielbein" e à conexão de spin. Algumas peculiaridades são apontadas quando o termo de Chern-Simons é levado em consideração, junto com os possíveis termos bilineares na torção. Apresentamos um procedimento para derivar o conjunto completo de propagadores, baseado num conjunto de operadores do tipo operadores de spin, e discutimos sob que condições o pólo destas funções de 2-pontos, ao nível clássico correspondem às excitações físicas.

Geometria em Termos da Vierbein e da Conexão de Spin

As vierbein realizam a ligação entre as coordenadas gerais da variedade com as coordenadas locais do espaço-tempo tangente. Representadas por $e_\alpha{}^{\mathsf{a}}(x)$, se relacionam com a métrica pela relação:

$$g_{\alpha\beta}(x) = e_\alpha{}^{\mathsf{a}}(x) e_\beta{}^{\mathsf{b}}(x) \eta_{\mathsf{ab}}, \tag{2.13}$$

$$D_\gamma e_\alpha{}^{\mathsf{a}} = \partial_\gamma e_\alpha{}^{\mathsf{a}} + \omega_{\gamma\mathsf{i}}{}^{\mathsf{a}} e_\alpha{}^{\mathsf{i}}, \tag{2.14}$$

onde $\omega_{\gamma\mathsf{i}}{}^{\mathsf{a}}$ é a conexão de spin, relacionada com os geradores da transformação infinitesimal de Lorentz ω_{ab} por $\omega_{\mathsf{ab}} = \omega_{\mu\mathsf{ab}} dx^\mu$, sendo portando uma matrix 1-forma.

Em relação a uma transformação geral de coordenadas a derivada covariante fica:

$$\nabla_\gamma e_\alpha{}^{\mathsf{a}} = D_\gamma e_\alpha{}^{\mathsf{a}} - \Gamma_{\gamma\alpha}{}^{\lambda} e_\lambda{}^{\mathsf{a}}, \tag{2.15}$$

que por definição é igual a zero, $\nabla_\gamma e_\alpha{}^{\mathrm{a}} = 0$. Esta definição garante que a metricidade é preservada, $\nabla_\gamma g_{\alpha\beta} = 0$, e estabelece a relação entre a conexão afim e a de spin:

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = e_{\mathrm{j}}{}^{\gamma} D_\alpha e_\beta{}^{\mathrm{j}} = e_{\mathrm{j}}{}^{\gamma}\left(\partial_\alpha e_\beta{}^{\mathrm{j}} + \omega_{\alpha\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}} e_\beta{}^{\mathrm{i}}\right) = e_{\mathrm{j}}{}^{\gamma}\partial_\alpha e_\beta{}^{\mathrm{j}} + \omega_{\alpha\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}} e_\beta{}^{\mathrm{i}} e_{\mathrm{j}}{}^{\gamma} \qquad (2.16)$$

Desta relação podemos facilmente escrever a torção e a curvatura do espaço-tempo em termos da conexão de spin, ficando:

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = 2\Gamma_{[\alpha\beta]}{}^{\gamma} = e_{\mathrm{j}}{}^{\gamma}(\partial_\alpha e_\beta{}^{\mathrm{j}} - \partial_\beta e_\alpha{}^{\mathrm{j}} + \omega_{\alpha\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}} e_\beta{}^{\mathrm{i}} - \omega_{\beta\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}} e_\alpha{}^{\mathrm{i}}) \qquad (2.17)$$

$$\omega_{\mathrm{abc}} = \gamma_{\mathrm{abc}} - K_{\mathrm{abc}}.$$

$$\mathcal{R}_{\mu\alpha\beta}{}^{\nu} = e_\beta{}^{\mathrm{i}} e_{\mathrm{j}}{}^{\nu} (\partial_\mu \omega_{\alpha\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}} - \partial_\alpha \omega_{\mu\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}} + \omega_{\mu\mathrm{k}}{}^{\mathrm{j}} \omega_{\alpha\mathrm{i}}{}^{\mathrm{k}} - \omega_{\alpha\mathrm{k}}{}^{\mathrm{j}} \omega_{\mu\mathrm{i}}{}^{\mathrm{k}}).$$

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta} = e_\beta{}^{\mathrm{i}} e_{\mathrm{j}}{}^{\mu} (\partial_\mu \omega_{\alpha\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}} - \partial_\alpha \omega_{\mu\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}} + \omega_{\mu\mathrm{k}}{}^{\mathrm{j}} \omega_{\alpha\mathrm{i}}{}^{\mathrm{k}} - \omega_{\alpha\mathrm{k}}{}^{\mathrm{j}} \omega_{\mu\mathrm{i}}{}^{\mathrm{k}})$$

$$\mathcal{R} = \eta^{\mathrm{ai}} e_{\mathrm{a}}{}^{\alpha} e_{\mathrm{j}}{}^{\mu} (\partial_\mu \omega_{\alpha\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}} - \partial_\alpha \omega_{\mu\mathrm{i}}{}^{\mathrm{j}} + \omega_{\mu\mathrm{k}}{}^{\mathrm{j}} \omega_{\alpha\mathrm{i}}{}^{\mathrm{k}} - \omega_{\alpha\mathrm{k}}{}^{\mathrm{j}} \omega_{\mu\mathrm{i}}{}^{\mathrm{k}}).$$

$$\mathcal{S} = \int d^3x \; e \left(\mathsf{a}_1 \mathcal{R} + \mathsf{a}_2 \mathcal{R}^2 + \mathsf{a}_3 \mathcal{R}_{\alpha\beta} \mathcal{R}^{\alpha\beta} + \mathsf{a}_4 \mathcal{L}_{CS} \right) ,$$

$$\mathcal{L}_{CS} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \Gamma_{\gamma\delta}{}^{\lambda} \left(\partial_\alpha \Gamma_{\lambda\beta}{}^{\delta} + \frac{2}{3} \Gamma_{\alpha\rho}{}^{\delta} \Gamma_{\beta\lambda}{}^{\rho} \right) ,$$

$$e_\alpha{}^{\mathsf{a}} = \delta_\alpha{}^{\mathsf{a}} + \frac{k}{2} H_\alpha{}^{\mathsf{a}} \left(\Rightarrow g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + k h_{\alpha\beta}, \quad h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (H_{\alpha\beta} + H_{\beta\alpha}) \right)$$

$$H_{\mathsf{ab}} = h_{\mathsf{ab}} + \mathcal{H}_{\mathsf{ab}} \; , \; h_{\mathsf{ab}} = H_{(\mathsf{ab})} \;\; e \;\; \mathcal{H}_{\mathsf{ab}} = H_{[\mathsf{ab}]} .$$

A parte anti-simétrica ainda pode ser descrita por:

$$\mathcal{H}_{\mathsf{ab}} = \epsilon_{\mathsf{abc}} h^{\mathsf{c}} \Rightarrow h_{\mathsf{a}} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mathsf{abc}} \mathcal{H}^{\mathsf{bc}} .$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} = \int d^3x \Big\{ & a_1 \left[\eta_{ce}\left(\omega_a{}^{ea}\omega_b{}^{bc} - \omega_b{}^{ea}\omega_a{}^{bc}\right) + k(h\partial_a\omega_b{}^{ba} - h^c_a\partial_c\omega_b{}^{ba} + h^c_a\partial_b\omega_c{}^{ba})\right] \\
& - 4a_2\omega_b{}^{ba}\partial_a\partial_c\omega_d{}^{dc} - a_3\eta_{ce}\eta^{bf}\left(\omega_b{}^{ea}\partial_a\partial_d\omega_f{}^{cd} - \omega_b{}^{ea}\partial_a\partial_f\omega_d{}^{cd}\right. \\
& \left. + \omega_a{}^{ea}\partial_b\partial_d\omega_f{}^{cd} - \omega_a{}^{ea}\partial_b\partial_f\omega_d{}^{cd}\right) + a_4\eta_{df}\eta_{bk}\epsilon^{abc}\left(\frac{k}{2}h^{dk}\partial_a\partial_e\omega_c{}^{fe} + \omega_c{}^{fe}\partial_a\omega_e{}^{kd}\right)\Big\} .
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

$$
\omega_a{}^{bc} = \epsilon^{bcd}Y_{ad},
$$

$$
Y_{ab} = y_{ab} + \mathcal{Y}_{ab}\ ,\ \ y_{ab} = Y_{(ab)}\ \ e\ \ \mathcal{Y}_{ab} = Y_{[ab]}.
$$

$$
\mathcal{Y}_{ab} = \epsilon_{abc}y^c \Rightarrow y_a = \frac{1}{2}\epsilon_{abc}\mathcal{Y}^{bc}.
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}= \int d^3x \Big\{ & \mathsf{a}_1 \left\{\eta_{\mathsf{ce}}\epsilon^{\mathsf{eai}}\epsilon^{\mathsf{bcj}} \left[\left(y_{\mathsf{ai}} + \epsilon_{\mathsf{ail}} y^{\mathsf{l}}\right)\left(y_{\mathsf{bj}} + \epsilon_{\mathsf{bjk}} y^{\mathsf{k}}\right) - \left(y_{\mathsf{bi}} + \epsilon_{\mathsf{bil}} y^{\mathsf{l}}\right)\left(y_{\mathsf{aj}} + \epsilon_{\mathsf{ajk}} y^{\mathsf{k}}\right)\right]\right. \\
& \left. + k\epsilon^{\mathsf{bai}} \left[h\partial_{\mathsf{a}}\left(y_{\mathsf{bi}} + \epsilon_{\mathsf{bil}} y^{\mathsf{l}}\right) - h^{\mathsf{c}}_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{c}}\left(y_{\mathsf{bi}} + \epsilon_{\mathsf{bil}} y^{\mathsf{l}}\right) + h^{\mathsf{c}}_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{b}}\left(y_{\mathsf{ci}} + \epsilon_{\mathsf{cil}} y^{\mathsf{l}}\right)\right]\right\} \\
& - 4\mathsf{a}_2\epsilon^{\mathsf{bai}}\epsilon^{\mathsf{dcj}}\left(y_{\mathsf{bi}} + \epsilon_{\mathsf{bil}} y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{c}}\left(y_{\mathsf{dj}} + \epsilon_{\mathsf{djk}} y^{\mathsf{k}}\right) \qquad (3.22) \\
& - \mathsf{a}_3\eta_{\mathsf{ce}}\eta^{\mathsf{bf}}\epsilon^{\mathsf{eai}}\epsilon^{\mathsf{cdj}}\left[\left(y_{\mathsf{bi}} + \epsilon_{\mathsf{bil}} y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{d}}\left(y_{\mathsf{fj}} + \epsilon_{\mathsf{fjk}} y^{\mathsf{k}}\right) - \left(y_{\mathsf{bi}} + \epsilon_{\mathsf{bil}} y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{f}}\left(y_{\mathsf{dj}} + \epsilon_{\mathsf{djk}} y^{\mathsf{k}}\right)\right. \\
& \left. + \left(y_{\mathsf{ai}} + \epsilon_{\mathsf{ail}} y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{d}}\left(y_{\mathsf{fj}} + \epsilon_{\mathsf{fjk}} y^{\mathsf{k}}\right) - \left(y_{\mathsf{ai}} + \epsilon_{\mathsf{ail}} y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{b}}\partial_{\mathsf{f}}\left(y_{\mathsf{dj}} + \epsilon_{\mathsf{djk}} y^{\mathsf{k}}\right)\right] \\
& + \mathsf{a}_4\eta_{\mathsf{df}}\eta_{\mathsf{bk}}\epsilon^{\mathsf{abc}}\epsilon^{\mathsf{fei}}\left[\frac{k}{2}h^{\mathsf{dk}}\partial_{\mathsf{a}}\partial_{\mathsf{e}}\left(y_{\mathsf{ci}} + \epsilon_{\mathsf{cil}} y^{\mathsf{l}}\right) + \epsilon^{\mathsf{kdj}}\left(y_{\mathsf{ci}} + \epsilon_{\mathsf{cil}} y^{\mathsf{l}}\right)\partial_{\mathsf{a}}\left(y_{\mathsf{ej}} + \epsilon_{\mathsf{ejk}} y^{\mathsf{k}}\right)\right]\Big\} .
\end{aligned}
$$

Operadores de Spin

Além dos operadores usuais de Barnes-Rivers e dos quatro operadores que extendem a álgebra usual dos operadores de spin, um novo operador que aparece associado a essa ação

$$\mathsf{D}_{\mathsf{a,bc}} = \mathsf{A}_{\mathsf{ab}}\partial_{\mathsf{c}} + \mathsf{A}_{\mathsf{ac}}\partial_{\mathsf{b}},$$

$$\mathcal{L}_{GF-diff} = \lambda F_{\mathsf{a}} F^{\mathsf{a}} \ , \ F_{\mathsf{a}} = \partial_{\mathsf{b}} \left(h_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} - \frac{1}{2}\delta_{\mathsf{a}}^{\mathsf{b}} h_{\mathsf{c}}^{\mathsf{c}} \right) \Longrightarrow \tag{3.31}$$

$$\mathcal{L}_{GF-diff} = \frac{1}{2} h^{\mathsf{ab}} \left[-\lambda\Box(\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{1}{2}\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}})) \right] h^{\mathsf{cd}}.$$

$$\mathcal{L}_{GF-LL} = \xi \left(\partial^{\mu}\omega_{\mu}{}^{\mathsf{ab}} \partial^{\nu}\omega_{\nu\mathsf{ab}} \right) \Longrightarrow$$

$$\mathcal{L}_{GF-LL} = \frac{1}{2}(y^{\mathsf{ab}} \left[-2\xi\Box(\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + 2\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}}) \right] y^{\mathsf{cd}} + y^{\mathsf{a}} \left[-4\Box\xi\theta_{\mathsf{a,c}} \right] y^{\mathsf{c}}$$

$$+ y^{\mathsf{ab}}[2\xi \mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}}] y^{\mathsf{c}} + y^{\mathsf{a}}[2\xi \mathsf{D}_{\mathsf{a,bc}}] y^{\mathsf{bc}})$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S} = \int d^3x \frac{1}{2}\Big\{ & y^{\mathsf{ab}} \Big[(2\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_3\Box)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + (2\mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_3\Box - 2\xi\Box)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} \\
& - (2\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_3\Box)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} - 4\xi\Box\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} - 2\sqrt{2}\mathsf{a}_1(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}}) \\
& + \frac{\mathsf{a}_4}{2}(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}})\Big] y^{\mathsf{cd}} + y^{\mathsf{a}}[(-4\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_3\Box - 4\xi\Box)\theta_{\mathsf{a,c}} \\
& + (-4\mathsf{a}_1 - 32\mathsf{a}_2\Box - 12\mathsf{a}_3\Box)\omega_{\mathsf{a,c}} + 2\mathsf{a}_4\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}]y^{\mathsf{c}} \\
& + y^{\mathsf{ab}}[\mathsf{a}_4\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} + (2\xi - \mathsf{a}_3)\mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}}]y^{\mathsf{c}} \\
& - y^{\mathsf{a}}[\mathsf{a}_4\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} - (2\xi - \mathsf{a}_3)\mathsf{D}_{\mathsf{a,bc}}]y^{\mathsf{bc}} \qquad (3. \\
& + h^{\mathsf{ab}}\left[-\lambda\Box\left(\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{1}{2}\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}})\right)\right] h^{\mathsf{cd}} \\
& + y^{\mathsf{ab}}\left[\frac{k\Box}{2}\mathsf{a}_4(\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}) + \frac{k}{4}\mathsf{a}_1(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}})\right] h^{\mathsf{cd}} \\
& + h^{\mathsf{ab}}\left[\frac{k\Box}{2}\mathsf{a}_4(\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}) + \frac{k}{4}\mathsf{a}_1(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}})\right] y^{\mathsf{cd}} \\
& - y^{\mathsf{a}}\left[\frac{k}{2}\mathsf{a}_1\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} - k\mathsf{a}_1(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}}\right] h^{\mathsf{bc}} \\
& + h^{\mathsf{ab}}\left[\frac{k}{2}\mathsf{a}_1\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} - k\mathsf{a}_1(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}}\right] y^{\mathsf{c}}\Big\} .
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{S}=\int d^3x \frac{1}{2}\Phi^T M \Phi \ , \ \Phi = \begin{pmatrix} y^{\mathsf{cd}} \\ y^{\mathsf{c}} \\ h^{\mathsf{cd}} \end{pmatrix} ,$$

$$M = \begin{pmatrix} M^{yy}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{yy}_{\mathsf{ab,c}} & M^{yh}_{\mathsf{ab,cd}} \\ M^{yy}_{\mathsf{a,cd}} & M^{yy}_{\mathsf{a,c}} & M^{yh}_{\mathsf{a,cd}} \\ M^{hy}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{hy}_{\mathsf{ab,c}} & M^{hh}_{\mathsf{ab,cd}} \end{pmatrix}$$

$$M^{yy}_{\mathsf{ab,cd}} = (2\mathsf{a}_1 - 2\mathsf{a}_3\Box)\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} + (2\mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_3\Box - 2\xi\Box)\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} - (2\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_3\Box)\mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}$$

$$- 4\xi\Box\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} - 2\sqrt{2}\mathsf{a}_1(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}}) + \frac{\mathsf{a}_4}{2}(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}),$$

$$M^{yy}_{\mathsf{ab,c}} = \mathsf{a}_4\mathsf{B}_{\mathsf{c,ab}} + (2\xi - \mathsf{a}_3)\mathsf{D}_{\mathsf{c,ab}},$$

$$M^{yh}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{k\Box}{2}\mathsf{a}_4(\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}) + \frac{k}{4}\mathsf{a}_1(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}),$$

$$M^{yy}_{\mathsf{a,cd}} = -\mathsf{a}_4\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} + (2\xi - \mathsf{a}_3)\mathsf{D}_{\mathsf{a,bc}},$$

$$M^{yy}_{\mathsf{a,c}} = -(4\mathsf{a}_1 + 2\mathsf{a}_3\Box + 4\xi\Box)\theta_{\mathsf{a,c}} - (4\mathsf{a}_1 + 32\mathsf{a}_2\Box + 12\mathsf{a}_3\Box)\omega_{\mathsf{a,c}} + 2\mathsf{a}_4\mathsf{A}_{\mathsf{a,c}}, \quad (3.35)$$

$$M^{yh}_{\mathsf{a,cd}} = -\frac{k}{2}\mathsf{a}_1\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} + k\mathsf{a}_1(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}},$$

$$M^{hy}_{\mathsf{ab,cd}} = \frac{k\Box}{2}\mathsf{a}_4(\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} - \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}}) + \frac{k}{4}\mathsf{a}_1(\mathsf{S}^{(2a)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{R}^{(1a)}_{\mathsf{ab,cd}}),$$

$$M^{hy}_{\mathsf{ab,c}} = \frac{k}{2}\mathsf{a}_1\mathsf{B}_{\mathsf{a,bc}} - k\mathsf{a}_1(\theta_{\mathsf{bc}} + \omega_{\mathsf{bc}})\partial_{\mathsf{a}}$$

$$M^{hh}_{\mathsf{ab,cd}} = -\lambda\Box\left(\mathsf{P}^{(1m)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} + \frac{1}{2}\mathsf{P}^{(0w)}_{\mathsf{ab,cd}} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathsf{P}^{(0sw)}_{\mathsf{ab,cd}} + \mathsf{P}^{(0ws)}_{\mathsf{ab,cd}})\right)$$

o setor $M^{hh}_{\mathsf{ab,cd}}$ sofre de um sério defeito. Não existe um setor puramente transverso associado ao campo gravitacional, em outras palavras, falta o operador $\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}$ associado ao campo h^{ab}, o que não nos permite inverter a matriz (3.34) para encontrar os propagadores da teoria, dados genericamente por:

$$\langle 0|\, T[F(x)F(y)]\, |0\rangle = iM^{-1}\delta^{(3)}(x-y), \tag{3.36}$$

onde M^{-1} é a matriz inversa associada ao operado M da ação.

Neste ponto cabe a seguinte informação: o problema de invertibilidade que aparece aqui do operador de onda, M, é compreensível, e na verdade deve ser esperado, uma vez que adotando-se o formalismo de primeira ordem algumas componentes do campo gravitacional não são dinâmicas e portanto devem ser descritas em termos das componentes independentes por meio das equações clássicas de movimento, que atualmente desempenham o papel de vínculos de movimento. Isto é uma particularidade de campos auxiliares aparecendo em ações com simetria local. Este é, na verdade, o caso da gravidade.

Podemos ver, deste modo, que uma teoria completamente invertível quando decomposta em termos de um campo de calibre e das componentes do tensor de torção apresenta dificuldades quando adotamos uma versão onde a torção não é considerada como sendo um campo fundamental, sendo este papel dado ao campo de calibre de Lorentz associado a transformações locais, que incorpora a informação da torção em si (por exemplo, na teoria usual de Einstein-Cartan $\omega_{\mathsf{abc}} = \gamma_{\mathsf{abc}} - K_{\mathsf{abc}}$, onde γ_{abc} é a parte "puramente Riemanniana", sem torção, e K_{abc} é o termo de contorsão). O termo de spin-2 do campo de calibre gravitacional é incorporado na parte Riemanniana da conexão de spin no formalismo de primeira ordem.

Uma outra observação que cabe aqui diz respeito ao fato de: se estivermos apenas preocupados com o espectro de excitações associado ao modelo sobre consideração e sua unitaridade, poderiamos simplesmente decompor os campos em suas componentes irredutíveis e diagonalizar a parte bilinear na ação (isto iria separar as componentes físicas das de compensação de calibre), lendo então o espectro. Contudo, as componentes dos campos assim obtidas seriam não locais, uma vez que $\Box^{-1}$ aparece nos projetores que atuam nos campos para separar as suas componentes físicas. Como, além de desejarmos obter os propagadores para os campos locais, temos em mente realizarmos, mais tarde, computações pertubativas a um laço, somos levados a adotar a escolha dos campos completos e portanto somos obrigados a fixar um calibre na ação, de forma a dar propagação as componentes de compensação e inverter o operador de onda.

Dadas as dificuldades associadas a essa ação específica, e para tentar entender melhor o papel da torção no formalismo de primeira ordem, optamos por descartar a ação (3.1) e começarmos novamente, com uma ação sem termos quadráticos na curvatura e com os termos de torção expostos

$$\mathcal{S} = \int d^3x \, e(\mathsf{a}_1\mathcal{R}+\mathsf{a}_2\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{T}^{\alpha\beta\gamma}+\mathsf{a}_3\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{T}^{\beta\gamma\alpha}+\mathsf{a}_4\mathcal{T}_{\alpha\beta}{}^{\beta}\mathcal{T}^{\alpha}{}_{\gamma}{}^{\gamma}+\mathsf{a}_5\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\mathcal{T}_{\alpha\beta\gamma}+\mathsf{a}_6\mathcal{L}_{CS})$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}= \int d^3x\{ & \mathsf{a}_1\{\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\left(y^{ab}+\epsilon^{abk}y_k\right)-y_a{}^a y_c{}^c+k[\epsilon^{ced}h\partial_e\left(y_{cd}+\epsilon_{cdk}y^k\right)\\
& -\epsilon^{aed}\left(h_a{}^c+\epsilon_a{}^c{}_l h^l\right)\partial_e\left(y_{cd}+\epsilon_{cdk}y^k\right)+\epsilon^{acd}\left(h_a{}^e+\epsilon_a{}^e{}_l h^l\right)\partial_e\left(y_{cd}+\epsilon_{cdk}y^k\right)]\}\\
& +\mathsf{a}_2\{-\frac{k^2}{2}[\left(h_{ab}+\epsilon_{abl}h^l\right)\Box\left(h^{ab}+\epsilon^{abk}h_k\right)-\left(h_{ab}+\epsilon_{abl}h^l\right)\partial_c\partial^a\left(h^{cd}+\epsilon^{cdk}h_k\right)]\\
& +2k[\epsilon^{bcd}\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\partial^a\left(h_{bc}+\epsilon_{bck}h^k\right)-\epsilon^{edb}\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\partial_e\left(h^a{}_d+\epsilon^a{}_d{}^k h_k\right)]\\
& +2[\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\left(y^{ab}+\epsilon^{abk}y_k\right)-y_a{}^a y_c{}^c]\}\\
& +\mathsf{a}_3\{\frac{k^2}{4}[\left(h_{ab}+\epsilon_{abl}h^l\right)\Box\left(h^{ba}+\epsilon^{bak}h_k\right)+\left(h_{ab}+\epsilon_{abl}h^l\right)\partial_d\partial^b\left(h^{ad}+\epsilon^{adk}h_k\right)\\
& -2\left(h_{ab}+\epsilon_{abl}h^l\right)\partial_d\partial^a\left(h^{bd}+\epsilon^{bdk}h_k\right)]+k[2\epsilon^{ecb}\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\partial_e\left(h_c{}^a+\epsilon_c{}^a{}_k h^k\right)\\
& -\epsilon^{edb}\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\partial_e\left(h^a{}_d+\epsilon^a{}_d{}^k h_k\right)+\epsilon^{cdb}\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\partial^a\left(h_{cd}+\epsilon_{cdk}h^k\right)]\\
& -\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\left(y^{ab}+\epsilon^{abk}y_k\right)+3y_a{}^a y_c{}^c\} \qquad (4.7)\\
& +\mathsf{a}_4\{-\frac{k^2}{4}[h_a{}^a\Box h_c{}^c+\left(h^{ab}+\epsilon^{abl}h_l\right)\partial_b\partial_d\left(h_a{}^d+\epsilon_a{}^d{}_k h^k\right)-2h_a{}^a\partial_c\partial_d\left(h^{cd}+\epsilon^{cdk}h_k\right)]\\
& -k[\epsilon^{eab}\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\partial_e h_c{}^c-\epsilon^{cab}\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\partial_d\left(h_c{}^d+\epsilon_c{}^d{}_k h^k\right)]\\
& +\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\left(y^{ab}+\epsilon^{abk}y_k\right)-\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\left(y^{ba}+\epsilon^{bak}y_k\right)\}\\
& +\mathsf{a}_5\{4y_a{}^a-\frac{k^2}{2}[\epsilon_{acd}\left(h^{ab}+\epsilon^{abl}h_l\right)\partial_b\left(h^{cd}+\epsilon^{cdk}h_k\right)\\
& -\epsilon^{aed}\left(h_{ab}+\epsilon_{abl}h^l\right)\partial_e\left(h^b{}_d+\epsilon^b{}_d{}^k h_k\right)]\\
& -k\left(h_{ab}+\epsilon_{abl}h^l\right)\left(y^{ba}+\epsilon^{bak}y_k\right)\}+\mathsf{a}_6\{\frac{k}{2}[\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\Box\left(h^{ba}+\epsilon^{bak}h_k\right)\\
& -\left(y^{ab}+\epsilon^{abl}y_l\right)\partial_a\partial_d\left(h_b{}^d+\epsilon_b{}^d{}_k h^k\right)-\left(y^{ab}+\epsilon^{abl}y_l\right)\partial_b\partial_c\left(h^c{}_a+\epsilon^c{}_a{}^k h_k\right)\\
& -y_a{}^a\Box h_c{}^c+y_a{}^a\partial_c\partial_d\left(h^{cd}+\epsilon^{cdk}h_k\right)+\left(y^{ab}+\epsilon^{abl}y_l\right)\partial_a\partial_b h_c{}^c]\\
& -[\epsilon^{aec}\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\partial_e y_c{}^b-\epsilon^{aeb}\left(y_{ab}+\epsilon_{abl}y^l\right)\partial_e y_c{}^c]\}\}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}= \int d^3x \frac{1}{2}\{ & h^{\mathrm{ab}}[\frac{k^2}{2}\Box(\mathrm{a}_3-2\mathrm{a}_2)\mathrm{P}^{(2)}_{\mathrm{ab,cd}}+\frac{k^2}{4}\Box(\mathrm{a}_3-2\mathrm{a}_2-\mathrm{a}_4-4\lambda)\mathrm{P}^{(1m)}_{\mathrm{ab,cd}} \\
& +\frac{k^2}{2}\Box(\mathrm{a}_3-2\mathrm{a}_2-2\mathrm{a}_4-2\lambda)\mathrm{P}^{(0s)}_{\mathrm{ab,cd}}-(\frac{k^2}{2}\Box\lambda)\mathrm{P}^{(0w)}_{\mathrm{ab,cd}}-(\frac{\sqrt{2}}{2}k^2\Box\lambda)(\mathrm{P}^{(0sw)}_{\mathrm{ab,cd}}+\mathrm{P}^{(0ws)}_{\mathrm{ab,cd}}) \\
& -\frac{\mathrm{k}^2}{2}\mathrm{a}_5(\mathrm{S}^{(2a)}_{\mathrm{ab,cd}}+\mathrm{R}^{(1a)}_{\mathrm{ab,cd}})]h^{\mathrm{cd}}+h^{\mathrm{ab}}[-(\frac{k^2}{2}\mathrm{a}_5)\mathrm{B}_{\mathrm{c,ab}}+\frac{k^2}{4}(\mathrm{a}_3-2\mathrm{a}_2-\mathrm{a}_4+4\lambda)\mathrm{D}_{\mathrm{c,ab}}]h^{\mathrm{c}} \\
& +h^{\mathrm{a}}[(\frac{k^2}{2}\mathrm{a}_5)\mathrm{B}_{\mathrm{a,cd}}+\frac{k^2}{4}(\mathrm{a}_3-2\mathrm{a}_2-\mathrm{a}_4+4\lambda)\mathrm{D}_{\mathrm{a,cd}}]h^{\mathrm{cd}} \\
& +h^{\mathrm{a}}[\frac{k^2}{2}\Box(\mathrm{a}_3-2\mathrm{a}_2-\mathrm{a}_4-4\lambda)\theta_{\mathrm{a,c}}-(k^2\Box)(2\mathrm{a}_2+\mathrm{a}_3)\omega_{\mathrm{a,c}}-(k^2\mathrm{a}_5)\mathrm{A}_{\mathrm{a,c}}]h^{\mathrm{c}} \\
& +y^{\mathrm{ab}}[2(\mathrm{a}_1+2\mathrm{a}_2-\mathrm{a}_3)\mathrm{P}^{(2)}_{\mathrm{ab,cd}}+2(\mathrm{a}_1+2\mathrm{a}_2-\mathrm{a}_3-\Box\xi)\mathrm{P}^{(1m)}_{\mathrm{ab,cd}}+2(6\mathrm{a}_2+5\mathrm{a}_3-\mathrm{a}_1)\mathrm{P}^{(0s)}_{\mathrm{ab,cd}} \\
& +4(2\mathrm{a}_2+\mathrm{a}_3-\Box\xi)\mathrm{P}^{(0w)}_{\mathrm{ab,cd}}+2\sqrt{2}(2\mathrm{a}_2+3\mathrm{a}_3-\mathrm{a}_1)(\mathrm{P}^{(0sw)}_{\mathrm{ab,cd}}+\mathrm{P}^{(0ws)}_{\mathrm{ab,cd}})+(\frac{\mathrm{a}_6}{2})(\mathrm{S}^{(2a)}_{\mathrm{ab,cd}}+\mathrm{R}^{(1a)}_{\mathrm{ab,cd}})]y^{\mathrm{cd}} \\
& +y^{\mathrm{ab}}[\mathrm{a}_6\mathrm{B}_{\mathrm{c,ab}}+2\xi\mathrm{D}_{\mathrm{c,ab}}]y^{\mathrm{c}}+y^{\mathrm{a}}[-\mathrm{a}_6\mathrm{B}_{\mathrm{a,cd}}+2\xi\mathrm{D}_{\mathrm{a,cd}}]y^{\mathrm{cd}} \qquad (4.11) \\
& +y^{\mathrm{a}}[4(2\mathrm{a}_2+2\mathrm{a}_4-\mathrm{a}_1-\mathrm{a}_3-\Box\xi)\theta_{\mathrm{a,c}}+4(2\mathrm{a}_2+2\mathrm{a}_4-\mathrm{a}_1-\mathrm{a}_3)\omega_{\mathrm{a,c}}+(2\mathrm{a}_6)\mathrm{A}_{\mathrm{a,c}}]y^{\mathrm{c}}+8\mathrm{a}_5y_{\mathrm{a}}{}^{\mathrm{a}} \\
& +h^{\mathrm{ab}}[\frac{k}{2}(\Box\mathrm{a}_6-2\mathrm{a}_5)\mathrm{P}^{(2)}_{\mathrm{ab,cd}}-(k\mathrm{a}_5)\mathrm{P}^{(1m)}_{\mathrm{ab,cd}}-\frac{k}{2}(\Box\mathrm{a}_6+2\mathrm{a}_5)\mathrm{P}^{(0s)}_{\mathrm{ab,cd}}-(k\mathrm{a}_5)\mathrm{P}^{(0w)}_{\mathrm{ab,cd}} \\
& +\frac{k}{4}(\mathrm{a}_1+2\mathrm{a}_2-2\mathrm{a}_3)(\mathrm{S}^{(2a)}_{\mathrm{ab,cd}}+\mathrm{R}^{(1a)}_{\mathrm{ab,cd}})]y^{\mathrm{cd}} \\
& +y^{\mathrm{ab}}[\frac{k}{2}(\Box\mathrm{a}_6-2\mathrm{a}_5)\mathrm{P}^{(2)}_{\mathrm{ab,cd}}-(k\mathrm{a}_5)\mathrm{P}^{(1m)}_{\mathrm{ab,cd}}-\frac{k}{2}(\Box\mathrm{a}_6+2\mathrm{a}_5)\mathrm{P}^{(0s)}_{\mathrm{ab,cd}}-(k\mathrm{a}_5)\mathrm{P}^{(0w)}_{\mathrm{ab,cd}} \\
& +\frac{k}{4}(\mathrm{a}_1+2\mathrm{a}_2-2\mathrm{a}_3)(\mathrm{S}^{(2a)}_{\mathrm{ab,cd}}+\mathrm{R}^{(1a)}_{\mathrm{ab,cd}})]h^{\mathrm{cd}} \\
& +h^{\mathrm{ab}}[\frac{k}{2}(\mathrm{a}_1-2\mathrm{a}_2-2\mathrm{a}_4)\mathrm{B}_{\mathrm{c,ab}}-k(\mathrm{a}_1-2\mathrm{a}_2-2\mathrm{a}_4)(\theta_{\mathrm{ab}}+\omega_{\mathrm{ab}})\partial_{\mathrm{c}}]y^{\mathrm{c}} \\
& +y^{\mathrm{a}}[-\frac{k}{2}(\mathrm{a}_1-2\mathrm{a}_2-2\mathrm{a}_4)\mathrm{B}_{\mathrm{a,bc}}+k(\mathrm{a}_1-2\mathrm{a}_2-2\mathrm{a}_4)(\theta_{\mathrm{bc}}+\omega_{\mathrm{bc}})\partial_{\mathrm{a}}]h^{\mathrm{cd}} \\
& +y^{\mathrm{ab}}[\frac{k}{2}(\mathrm{a}_1+2\mathrm{a}_2)\mathrm{B}_{\mathrm{c,ab}}-k(\mathrm{a}_1-2\mathrm{a}_2-2\mathrm{a}_3)(\theta_{\mathrm{ab}}+\omega_{\mathrm{ab}})\partial_{\mathrm{c}}]h^{\mathrm{c}} \\
& +h^{\mathrm{a}}[-\frac{k}{2}(\mathrm{a}_1+2\mathrm{a}_2)\mathrm{B}_{\mathrm{a,bc}}+k(\mathrm{a}_1-2\mathrm{a}_2-2\mathrm{a}_3)(\theta_{\mathrm{bc}}+\omega_{\mathrm{bc}})\partial_{\mathrm{a}}]y^{\mathrm{cd}} \\
& +h^{\mathrm{a}}[(2k\mathrm{a}_5)\theta_{\mathrm{a,c}}+k(2\mathrm{a}_5-\Box\mathrm{a}_6)\omega_{\mathrm{a,c}}+k(\mathrm{a}_1-2\mathrm{a}_2-2\mathrm{a}_4)\mathrm{A}_{\mathrm{a,c}}]y^{\mathrm{c}} \\
& +y^{\mathrm{a}}[(2k\mathrm{a}_5)\theta_{\mathrm{a,c}}+k(2\mathrm{a}_5-\Box\mathrm{a}_6)\omega_{\mathrm{a,c}}+k(\mathrm{a}_1-2\mathrm{a}_2-2\mathrm{a}_4)\mathrm{A}_{\mathrm{a,c}}]h^{\mathrm{c}}\}.
\end{aligned}
$$

$\theta_{\mathrm{ab}}\partial_{\mathrm{c}}$ e $\omega_{\mathrm{ab}}\partial_{\mathrm{c}}$,

$$\mathcal{S}=\int d^3x \frac{1}{2}\Phi^T M\Phi \ , \ \Phi = \begin{pmatrix} h^{\mathsf{cd}} \\ h^{\mathsf{c}} \\ y^{\mathsf{cd}} \\ y^{\mathsf{c}} \end{pmatrix},$$

onde o operador de onda M toma a forma,

$$M = \begin{pmatrix} M^{hh}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{hh}_{\mathsf{ab,c}} & M^{hy}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{hy}_{\mathsf{ab,c}} \\ M^{hh}_{\mathsf{a,cd}} & M^{hh}_{\mathsf{a,c}} & M^{hy}_{\mathsf{a,cd}} & M^{hy}_{\mathsf{a,c}} \\ M^{yh}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{yh}_{\mathsf{ab,c}} & M^{yy}_{\mathsf{ab,cd}} & M^{yy}_{\mathsf{ab,c}} \\ M^{yh}_{\mathsf{a,cd}} & M^{yh}_{\mathsf{a,c}} & M^{yy}_{\mathsf{a,cd}} & M^{yy}_{\mathsf{a,c}} \end{pmatrix},$$

Onde o termo linear $8\mathsf{a}_5 y_{\mathsf{a}}{}^{\mathsf{a}}$ foi descartado, pois, como se sabe, termos lineares podem sempre ser eliminados por uma translação no campo:

$$\int (\alpha\phi^2 + \beta\phi) d^3x \xrightarrow{\phi\to\phi'+c} \int (\alpha\phi'^2 + 2\alpha c\phi' + \alpha c^2 + \beta\phi' + \beta c) d^3x = \int \alpha\phi^2 d^3x, \tag{4.15}$$

escolhendo $c = -\frac{\beta}{2\alpha}$, abandonando o sinal $'$ e lembrando que termos constantes na ação podem ser descartados.

Devido ao tamanho da ação (4.11) e da rotina de inversão descrita acima, não é viável o cálculo manual dos termos da matriz inversa. Deste modo usamos um programa de computação algébrica, o Maple $8^{(\mathrm{TM})}$, para realizarmos estes cálculos. Mesmo assim as expressões resultantes foram enormes, de análise muito difícil. No caso mais geral possível o programa falhou de encontrar resultados, travando continuamente, mesmo rodando num computador com procesador Pentium $4^{(\mathrm{TM})}$ de 3,2MHz e com 1Gb de memória RAM.

Como quando contraimos os propagadores com as correntes saturadas somente os polos físicos sobrevivem, que no nosso caso, como veremos adiante, são bem poucos, optamos por não fazer listagens dos propagadores, apresentando somente aqueles realmente utilizados quando do levantamento do espectro de excitações, e só nesse momento. Contudo uma descrição detalhada dos casos computados será dada mais a frente.

$$A_{S\mu\nu} = S_{[\mu\nu]} = d_1(p_\mu q_\nu - q_\mu p_\nu) + d_2(p_\mu \varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu p_\nu)$$

$$+ d_3(q_\mu \varepsilon_\nu - \varepsilon_\mu q_\nu),$$

A amplitude de transição de corrente é dada por:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \tau^* & \rho^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^{HH} & M^{HY} \\ M^{YH} & M^{YY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ \rho \end{pmatrix} \Rightarrow \tag{5.20}$$

$$\mathcal{A} = \tau^* M^{HH} \tau + \tau^* M^{HY} \rho + \rho^* M^{YH} \tau + \rho^* M^{YY} \rho,$$

onde τ é a fonte de corrente para os campos h e ρ é a fonte de corrente para os campos y.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} =& < H2H2_{(2)} > t^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} t^{\mathsf{cd}} + < H2H2_{(0s)} > t^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} t^{\mathsf{cd}} \\ &+ < H2Y2_{(2)} > t^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} r^{\mathsf{cd}} + < H2Y2_{(0s)} > t^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} r^{\mathsf{cd}} \\ &+ < Y2H2_{(2)} > r^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} t^{\mathsf{cd}} + < Y2H2_{(0s)} > r^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} t^{\mathsf{cd}} \\ &+ < Y2Y2_{(2)} > r^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}} r^{\mathsf{cd}} + < Y2Y2_{(0s)} > r^{\mathsf{ab}^*} \mathsf{P}^{(0s)}_{\mathsf{ab,cd}} r^{\mathsf{cd}},\end{aligned} \tag{5.24}$$

onde $< H2H2_{(2)} >$ é o propagador para o campo gravitacional simétrico de ordem(rank)-2 ($H2$ em $H2H2_{(2)}$) associado ao operador $\mathsf{P}^{(2)}_{\mathsf{ab,cd}}$ ($_{(2)}$ em $H2H2_{(2)}$). Os outros coeficientes dos operadores tendo significado análogo.

1. Com todo o conjunto de parâmetros da ação, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 mais λ, diferentes de zero, nossas facilidades computacionais algébricas falharam em obter um resultado devido a extensão das expressões resultantes. O mesmo se deu para (i) a_5 ou a_6 igual a zero e para (ii) a_1 e a_6 iguais a zero. Com a_1 e a_5 iguais a zero conseguimos obter nosso primeiro resultado, como descrito abaixo.

2. Considerando o termo de Chern-Simons, a_6, nós obtivemos o seguinte comportamento no denominador para os propagadores em (5.25):

    - Com $\mathsf{a}_1 = 0$, encontramos termos proporcionais à p^{22}.
    - A potência mais baixa, p^6, ocorreu com $\mathsf{a}_1 = \mathsf{a}_2 = \mathsf{a}_4 = 0$, ou seja, somente a_3 e a_6 foram considerados.
    - Com $\mathsf{a}_3 = 0$, a matriz não é invertível para nenhum caso. Ou seja, este termo é fundamental para a presente teoria.

3. Sem o termo de Chern-Simons, $a_6 = 0$, nós obtivemos, em todos os casos invertíveis, uma potencia p^2 no denominador. Este não é um resultado trivial. Nós podemos justificâ-lo apontando para o fato de que o termo de Chern-Simons contribui com um termo quadrático na conexão de spin com uma derivada espaço-temporal, enquanto que o escalar de curvatura contribui com um termo que mixa H com ω. Colocando a_6 igual a zero, nós suprimimos termos do tipo $\omega - \omega$ com uma derivada, e assim, inevitavelmente, nós reduzimos as potências do momentum aparecendo nos propagadores.

a_3, e a_1 e a_3, diferentes de zero

O caso mais simples invertível ocorre quando consideramos somente a_3 diferente de zero na ação. Neste caso os propagadores relevantes têm a forma:

$$
\begin{aligned}
H2H2_{(2)} &= \frac{2}{3k^2p^2\mathsf{a}_3}i.\\
H2H2_{(0s)} &= -\frac{2}{k^2p^2\mathsf{a}_3}i.\\
H2Y2_{(2)} &= H2Y2_{(0s)} = Y2H2_{(2)} = Y2H2_{(0s)} = 0.\\
Y2Y2_{(2)} &= \frac{1}{6\mathsf{a}_3}i.\\
Y2Y2_{(0s)} &= 0.
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

$$
\mathcal{A} = \left(-\frac{2}{3k^2p^2\mathsf{a}_3}\left|c_6\right|^2_{tt} + \frac{1}{12\mathsf{a}_3}\left|c_6\right|^2_{rr}\right) i.
$$

Devemos notar nessa expressão que o polo não massivo tem por origem o setor gravitacional h e tem contribuições vinda dos setores de spin-0 e de spin-2.

Calculando a parte imaginária do resíduo da amplitude no polo não massivo obtemos:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\left(\lim_{p^2\to 0}[p^2\mathcal{A}]\right) = -\frac{2\,|c_6|^2_{tt}}{3k^2\mathsf{a}_3}. \tag{5.28}$$

Do requerimento de ter um resíduo positivo-definido no polo para garantir a unitaridade a "tree-level"da teoria nós devemos ter $\mathsf{a}_3 < 0$.

Considerando agora a adição do termo do escalar de curvatura a_1, obtemos:

$$H2H2_{(2)} = \frac{2(\mathsf{a}_3 - \mathsf{a}_1)}{k^2p^2(3\mathsf{a}_3^2 + \mathsf{a}_1^2 - 3\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1)}i.$$

$$H2H2_{(0s)} = -\frac{2(\mathsf{a}_3 + \mathsf{a}_1)}{k^2p^2(\mathsf{a}_3^2 - \mathsf{a}_1^2 + \mathsf{a}_3\mathsf{a}_1)}i.$$

$$H2Y2_{(2)} = H2Y2_{(0s)} = Y2H2_{(2)} = Y2H2_{(0s)} = 0.$$

$$Y2Y2_{(2)} = \frac{\mathsf{a}_3}{2(3\mathsf{a}_3^2 + \mathsf{a}_1^2 - 3\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1)}i.$$

$$Y2Y2_{(0s)} = 0.$$

$$\mathcal{A} = \left(-\frac{2}{k^2p^2} \times \frac{\mathsf{a}_3^3}{3\mathsf{a}_3^4 - 5\mathsf{a}_3^2\mathsf{a}_1^2 + 4\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1^3 - \mathsf{a}_1^4} \left|c_6\right|_{tt}^2 + \frac{\mathsf{a}_3}{2(3\mathsf{a}_3^2 + \mathsf{a}_1^2 - 3\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1)} \left|c_6\right|_{rr}^2 \right) i.$$

Podemos ver que a estrutura básica da amplitude não muda, com o polo tendo contribuições dos mesmos setores de spin e permanecendo não massivo. A relação entre os parâmetros agora fica:

$$\mathrm{Im}(res\mathcal{A}) = \mathrm{Im}\left(\lim_{p^2\to 0}[p^2\mathcal{A}]\right) = -\frac{2}{k^2}\frac{\mathsf{a}_3^3}{3\mathsf{a}_3^4 - 5\mathsf{a}_3^2\mathsf{a}_1^2 + 4\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1^3 - \mathsf{a}_1^4}\left|c_6\right|_{tt}^2. \quad (5.31)$$

O denominador da expressão acima pode ser escrito como:

$$(\mathsf{a}_3^2 + \mathsf{a}_3\mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_1^2)(3\mathsf{a}_3^2 - 3\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_1^2). \quad (5.32)$$

O binómio $3\mathsf{a}_3^2 - 3\mathsf{a}_3\mathsf{a}_1 + \mathsf{a}_1^2$ tem raizes complexas e é sempre maior que zero. Deste modo o requerimento de ter um resíduo positivo-definido no polo implica em (com $\mathsf{a}_3 < 0$) $\mathsf{a}_1^2 - \mathsf{a}_3\mathsf{a}_1 - \mathsf{a}_3^2 < 0$.

E o termo do escalar de curvatura deve satisfazer a:

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathsf{a}_3 \approx 1.618\mathsf{a}_3 < \mathsf{a}_1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2}\mathsf{a}_3 \approx -0.618\mathsf{a}_3.$$

O caso em que todos os parâmetros são diferente de zero (excluindo-se a_5 e a_6, é claro) contribui somente com novas correções algébricas para a amplitude, sem alterar a estrutura do polo que continua não massivo e com a mesma contribuição de spin. A relação entre os parâmetros torna-se muito emaranhada, devido ao considerável número de parâmetros envolvidos, de modo que varias hipóteses precisam ser feitas para definir os seus intervalos no espaço de parâmetros. Devido a isso, e a falta de qualquer novidade estrutural, não apresentaremos as expressões associadas.

Um comentário interessante é notar que, no trabalho anterior, [24], obtivemos somente polos físicos massivos, enquanto que neste trabalho obtivemos somente polos físicos não massivos, e que a condição de unitaridade para estes polos demanda que $\mathsf{a}_3 < 0$, o que implica, para o parâmetro que governa o escalar de curvatura o vínculo, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\mathsf{a}_3 < \mathsf{a}_1 < \frac{1-\sqrt{5}}{2}\mathsf{a}_3$. Da literatura, sabemos que para a teoria da gravitação planar sem torção $\mathsf{a}_1 > 0$. Do nosso trabalho anterior, obtivemos que $\mathsf{a}_1 < 0$, na presença de torção, se não quisermos que o modo massivo obtido não se torne uma excitação fantasma. Com o formalismo de primeira ordem adotado aqui o parâmetro está confinado ao intervalo acima, varrendo valores tanto positivos quanto negativos.